

$$W \sim \text{Exp}(\mu(1-p))$$

$$E(W) = \frac{1}{\mu(1-p)} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad \text{Μέσος χρόνος ο πελάτης στο σύστημα}$$

$$\text{Άρα } E(W) = E(W_q) + \frac{1}{\mu} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Μέσος χρόνος} \\ \text{εξυπηρέτησης} \end{array}$$

↑
Μέσος χρόνος
αναμονής
στην ουρά

$$E(W_q) = E(W) - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-p)}$$

$$L = \frac{\rho}{1-p} \quad L = \lambda E(W) \quad \text{Formula}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-p} \quad L_q = \lambda E(W_q) \quad \text{Little}$$

$$E(\text{αριθμός πελατών στο σύστημα (ουρά)}) = (\text{Μέσος αριθμός}) (\text{Μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα (ουρά)})$$

$$\text{Αν } L - L_q \text{ τότε } L - L_q = \rho = \lambda \frac{1}{\mu} \quad \left| \begin{array}{l} \text{αριθμός πελατών που} \\ \text{έρχονται σε μια εξυπηρέτηση} \end{array} \right|$$

Παράδειγμα

Πελάτες φέρνουν με $\rho(\lambda=2)$ 2 αυτοκ/ώρα. Ο μοναδικός μηχανικός ελέγχει τα αυτοκίνητα. Ρυθμός εξυπηρέτησης 3 πελάτ./ώρα.

Χρόνος ελέγχου 15 λεπτά / αυτοκ. μειώνεται.
Θέλω διαφορές αναμονής στο πριν και μετά του συστήματος.

~~Προβλ~~
~~λ=2~~
~~μ=3~~

Λύση

$$A=2$$

$$\rho < 1$$

$$\text{Exp}(3) \rightarrow \mu=3$$

Θέλω μέσο χρόνο αναμονής στο σύστημα.

$$E(w) = \frac{1}{\mu - A} = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$L = A E(w) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$E(w_q) = E(w) - \frac{1}{\mu} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$L_q = A E(w_q) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\bullet P(x > 0) = 1 - P(x=0) = 1 - (1-\rho) = \rho$$

• Ποσοστό χρόνου που η μονάδα δεν αναρροδεύεται: $1-\rho$

Παράδειγμα

Στα δρόμα τα αυτοκ. περνούν με $P(12)$, ο χρόνος ~~εξυπηρέτησης~~ ^{εξυπηρέτησης} με μέση τιμή 2 λεπτά) Ποια η πιθανότητα να βρει κάποιο αυτοκίνητο το κατεδωλημένο β) Ποιο το μέσο μήκος ουράς (όταν ρ)?

Λύση

$$a) P(x > 0) = 1 - P(x=0) = \rho$$

Κάθε εξυπηρέτηση είναι 2 λεπτά άρα εξυπηρετούνται 30 αυτοκίνητα

$$\rho = \frac{12}{30}$$

$$b) L_q = \sum_{n=2}^{\infty} n \bar{p}_n, \quad \bar{p}_n = \frac{\rho_{n+1}}{\sum_{n=2}^{\infty} \rho_n}$$

$$\text{Άρα } L_q = \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{\rho_{n+1}}{\sum_{n=2}^{\infty} \rho_n} = \frac{1}{\sum_{n=2}^{\infty} \rho_n} \sum_{n=2}^{\infty} n \rho_{n+1} = \frac{L_q}{\sum_{n=2}^{\infty} \rho_n}$$

Παράδειγμα

Είναι πολιτική της εταιρίας να δοθεί ένα υπόλοιπο όταν ένα αυτοκίνητο περιμένει παραπάνω από 3 λεπτά. Πόσο πρέπει να αυξηθεί η τιμή των πωλήσεων ώστε να διατηρηθεί επιπλέον uncaptured.

Λύση

$$E(W_q) \geq \frac{3}{60} \Rightarrow \frac{1}{30(30-\lambda)} \geq \frac{3}{60}$$

Παράδειγμα

- Ένας φοιτητής κάνει μικροδουλειές για να πληρώσει το εισόδημά του. Οι αιτήσεις έρχονται κατά μέσο όρο κάθε 5 μέρες και ο χρόνος αναμέσά τους είναι εκθετικός με μέση τιμή 4 ημ.
- Ποια η πιθανότητα να μείνει χωρίς δουλειά
 - Αν ο φοιτητής παίρνει 50€/δουλειά ποιο το μέσο μηνιαίο εισόδημα
 - Αν στο τέλος του μήνα αποφασίσει να δώσει αλλού τις εφευρεθείς δουλειές με 40€/μήν πόσα χρειάζεται κατά μέσο όρο να πληρώσει?

Λύση

$$i) p_0 = 1 - \rho$$

$$\lambda = \frac{1}{5} \quad \mu = \frac{1}{4} \Rightarrow \rho = \frac{4}{5}$$

$$ii) 50 \text{ χιλ. εμμ.} = 50 \cdot \frac{30}{4}$$

$$iii) 40 \cdot Lq = 40 \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Παράδειγμα

Έξ ένα βελγικό σιν αμάκι με τής Super βελγίαν η μέση τιμή του προϊόντος ετησίως ακολουθεί Εκδ. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με μέση τιμή λ ατ / ώρα. Το κόστος παραμονής στο βελγικό είναι k_2 γ.μ / ατ. / ώρα. Το κόστος των ατ. που ετησίως είναι k_2 γ.μ / ατ. / ώρα. Να προσδιορίσει ο μέσος χρόνος ετησίως που ετησίως το συνολικό ~~ετησίως~~ κόστος είναι

Λύση

$$K(\mu) = L k_1 + \mu k_2 = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} k_1 + \mu k_2$$

$$\frac{\partial K(\mu)}{\partial \mu} = 0 \quad (\mu - \lambda)^2 = \frac{\lambda k_1}{k_2} \quad \mu_1 = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda k_1}{k_2}}$$

$$\mu_2 = \lambda - \sqrt{\frac{\lambda k_1}{k_2}}$$

~~ετησίως~~ $\frac{\partial^2 K(\mu)}{\partial \mu^2} = \frac{2\lambda k_1}{(\mu - \lambda)^3} > 0$ Άρα $\mu = \mu_1$

Άσκηση που ετησίως ετησίως

~~ετησίως~~ $X \sim \text{Exp}(\mu)$ ~~ετησίως~~

$$P(Y(x) = n) = \int_0^{\infty} P(Y(x) = n | X = x) \mu e^{-\mu x} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x} (\mu x)^n}{n!} \mu e^{-\mu x} dx =$$

$$= \frac{\mu A^u}{(\lambda + \mu)^{u+1}} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda + \mu)^{u+1} A^u e^{-(\lambda + \mu)x}}{u!} dx =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^u \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^u \frac{\mu}{\lambda + \mu} \equiv \text{Geo} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) \quad u=0,1,2,\dots$$

$$E(Y(x)) = E(E(Y(x)/X)) = E(\lambda X) = \lambda E(X) = \lambda \frac{1}{\mu} = \rho$$

Γράσις αναγραφόμενων

T : γράσις βωσγρως αναγραφόμενων αναδιδου

$$K(t) dt = P(t < T < t + dt)$$

(i) Το T αρχίζει με ένα πεδάτι

(ii) Ο αριθμός πεδάτων δεν γίνεται ποτέ μηδέν στο T

(iii) Μετά το T ο αριθμός πεδάτων είναι μηδέν

(iv) Λίγο πριν τελειώσει το T έχουμε ένα μόνο πεδάτι στο σύστημα

$E'(t)$ ο αριθμός πεδάτων στο σύστημα ψέτα στο T

$$q_u(t) = P(E'(t) = u \mid E'(0) = 1)$$

$$q_0(0) = 0$$

$$q_1(0) = 1 \quad \text{αφού πάντα υπάρχει με ένα πεδάτι}$$

$$q_u(0) = 0$$

$$K(t) dt = P(t < T < t + dt) = q_1(t) (\mu dt + o(dt))$$

↑
1 πεδ στο σύστημα

εξυπηρετείται και φεύγει

Λρα $K(t) = q_1(t) \cdot \mu$

$$q_0(t+dt) = q_1(t)(\mu dt + o(dt)) + q_0(t)$$

(~~q~~ είχα 2 συντελεστές και είπαμε
 ήμουν στο 0 και είπαμε)

$$\left| \frac{dq_0(t)}{dt} = \mu \cdot q_1(t) \right| (1)$$

$$q_1(t+dt) = q_1(t)(\mu dt + o(dt)) + q_1(t)(1 - (\lambda + \mu)dt + o(dt))$$

(~~q~~ είχα 2 και είπαμε ένας
 είχα 1 και να αφαιρεθεί)

$$\left| \frac{dq_1(t)}{dt} + (\lambda + \mu)q_1(t) = \mu q_2(t) \right| (2)$$

$$q_n(t+dt) = q_{n+1}(t)(\mu dt + o(dt)) + q_{n-1}(t)(\lambda dt + o(dt)) + q_n(t)(1 - (\lambda + \mu)dt + o(dt))$$

$$\left| \frac{dq_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu)q_n(t) = \lambda q_{n-1}(t) + \mu q_{n+1}(t) \right| (3)$$

Με μετασχηματισμό Laplace $q_n(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} q_n^*(z)$ Άρα οι (1), (2), (3) γίνονται

$$-q_0(0) + 2q_0^*(z) = \mu q_1^*(z)$$

$$-q_1(0) + 2q_1^*(z) + (\lambda + \mu)q_1^*(z) = \mu q_2^*(z)$$

⋮

$$-q_n(0) + 2q_n^*(z) + (\lambda + \mu)q_n^*(z) = \lambda q_{n-1}^*(z) + \mu q_{n+1}^*(z)$$

Επομένως $2q_0^*(z) = \mu q_1^*(z)$

4-

$$(2+\lambda+\mu) q_1^*(z) = \mu q_2^*(z) + 1 \quad (4)$$

$$(2+\lambda+\mu) q_n^*(z) = \mu q_{n+1}^*(z) + \lambda q_{n-1}^*(z) \leftarrow \text{Εξίσωση διαφορών}$$

Για τα χαρακτηριστικά πολλαπλάσια : $\mu x^2 - (2+\lambda+\mu)x + \lambda$

με ρίζες : $a(z), b(z)$ όπου $a(z) > 1 > b(z)$

$$q_n^*(z) = \epsilon a^n(z) + F b^n(z) \leftarrow \text{Γενική λύση. (πρέπει να ομαδούει)}$$

$$q_n^*(z) = F b^n(z) \quad (\text{Αφού } a(z) > 1 \Rightarrow \epsilon = 0)$$

$$(4) \Rightarrow (2+\lambda+\mu) q_1^*(z) = \mu q_2^*(z) + 1$$

$$(2+\lambda+\mu) F b(z) = \mu F b^2(z) + 1 \quad (\text{Γίνει δύνα του γαρ. πολ.})$$

$$F = \frac{-1}{\mu b^2(z) - (2+\lambda+\mu)b(z)} = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1}$$

Άρα $q_1^*(z) = \frac{1}{1} b(z)$ (δεν μπορώ να το απλοποιήσω
οπότε βρίσκω όλο και πάλι)

Παίρνω μετασχηματισμό Laplace για το $k(t) = \mu q_1(t)$ και έχω

$$k^*(z) = \mu q_1^*(z) = \frac{\mu}{1} b(z) = \frac{b(z)}{\rho}$$

$$k^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt} k(t) dt$$

$$\frac{dk^*(z)}{dz} = \int_0^\infty -t e^{-zt} k(t) dt$$

$$\left. \frac{dk^*(z)}{dz} \right|_{z=0} = -G(\tau)$$

$$E(T) = - \left. \frac{dK(z)}{dz} \right|_{z=0} = - \frac{1}{\rho} \left. \frac{d\phi(z)}{dz} \right|_{z=0} =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \left. \frac{d}{dz} \left(\frac{(2+d+u) - \sqrt{(2+d+u)^2 - u^2}}{2u} \right) \right|_{z=0}$$

μεταξύ πρώτης και δεύτερης αναγραφόμενης υποθέσεως.

Διαδικασία Αναγνώρισης

Έστω S_1, S_2 οι πρώτες ελγής μεταβλ 2 διαδοχικών αναγραφόμενων
 με $U = S_2 - S_1$

$$h(x)dx = P(x < U < x+dx)$$

1) Πριν από το S_1 το σύστημα έχει προπορεύσει από ένα πεδίο ($u > 1$)

2) Πριν από το S_1 - " - μόνο ένα πεδίο ($u = 1$)

$$\text{Άρα } h(x)dx = P\left(x < U < x+dx \mid \begin{array}{l} \text{πριν } S_1 \text{ έχω} \\ 2 \text{ ή προπο.} \\ \text{πεδίατες} \end{array}\right) \cdot P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ ή προπο.} \\ \text{πεδίατες} \end{array}\right)$$

$$+ P\left(x < U < x+dx \mid \begin{array}{l} \text{πριν } S_1 \\ 1 \text{ πεδίο} \end{array}\right) \cdot P(1 \text{ πεδίο}) =$$

$$= \mu e^{-\mu x} dx P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ ή προπο.} \\ \text{πεδίατες} \end{array}\right) + \int_0^x \mu e^{-\mu z} \mu e^{-\mu(x-z)} dz dx P\left(\begin{array}{l} 1 \text{ πεδίο} \\ \text{πριν } S_1 \end{array}\right) :$$

(συνδυασμός)

Γίνεται 2 $f(z)$ x, y ανεξ. $x = y+z \rightarrow \int_0^x f(z)g(x-z) dz$ (1)

y $g(y)$

$$P(1 \text{ περατ.} / \text{το σύστημα} \text{ όχι αδειο}) = \frac{p(1-p)}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i}$$

$$P(2 \text{ ή περ.} / \text{το σύστημα} \text{ όχι αδειο}) = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} p_n}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow h(x) = \mu e^{-\mu x} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} p_n}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i} + \int_0^x \lambda e^{-\lambda z} \mu e^{-\mu(x-z)} dz dx \frac{p(1-p)}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{\mu e^{-\mu x} (1-p_0-p_1) + p_1 \lambda \mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{-(\lambda-\mu)z} dz}{1-p_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{(1-(1-p)-(1-p)p) e^{-\mu x} \cdot \mu + p(1-p) \frac{\lambda}{p-1} (e^{-\mu x} - e^{-\lambda x})}{1-(1-p)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{p^2 \mu e^{-\mu x} - p \lambda (e^{-\mu x} - e^{-\lambda x})}{p} = \lambda e^{-\mu x} - \lambda e^{-\mu x} + \lambda e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow h(x) = \lambda e^{-\lambda x} \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Άρα η διαδικασία των αναγγελιών είναι ίδια με την διαδικασία των αφίξεων

Έστω σύστημα $M/M/1/\infty \rightarrow M/M/1, \infty \rightarrow \dots \rightarrow M/M/1/\infty$

Έστω $f_i(t)$: ο αριθμός περατών στο σύστημα i την χρον. στιγμή t .

$$P_{u_1, u_2, \dots, u_n}(t) = P(f_1(t)=u_1, f_2(t)=u_2, \dots, f_n(t)=u_n) =$$

$$= P_{u_1}(t) \cdot P_{u_2}(t) \cdot \dots \cdot P_{u_n}(t) =$$

$$= (1-p_1) p_1^{u_1} (1-p_2) p_2^{u_2} \dots (1-p_n) p_n^{u_n} \quad \mu \epsilon \quad p_i = \frac{\lambda}{\mu_i}$$